



★ PHẦN II. BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Ví dụ 1. Cho $x > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = x + \frac{4}{x}$, rồi giải bất phương trình $x + \frac{4}{x} \leq 5$.

Lời giải. GTNN. Vì $x > 0$ nên áp dụng Cô-si cho hai số dương: $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$, dấu “=” khi $x = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x = 2$. Vậy $\min f = 4$ tại $x = 2$.

Giải BPT. Với $x > 0$: $x + \frac{4}{x} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 4}{x} \leq 0$; vì $x > 0$ nên tương đương $x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$. Vậy $S = [1; 4]$. (Nối B5: Cô-si, điểm rơi · B7: tam thức · B6: đưa thương về xét dấu.)

Ví dụ 2. Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0. \end{cases}$$

Lời giải. BPT thứ nhất (điều kiện $x \neq -2$): $\frac{x-1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x \geq 1$. BPT thứ hai: $x^2 - 4x + 3 < 0$ có nghiệm 1; 3, $a > 0$ nên $1 < x < 3$. Giao hai tập nghiệm: $[(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)] \cap (1; 3) = (1; 3)$. Vậy $S = (1; 3)$. (Nối B6: BPT thương · B7: BPT bậc hai.)

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $x^2 - |x| - 6 \leq 0$.

Lời giải. Đặt $t = |x| \geq 0$. Bất phương trình thành $t^2 - t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 3$; kết hợp $t \geq 0$ được $0 \leq t \leq 3$, tức $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$. Vậy $S = [-3; 3]$. (Nối B7: BPT bậc hai theo ẩn phụ · B6: khử $|\cdot|$.)

Ví dụ 4. Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $(m-2)x^2 + 2(m-2)x + 3 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Trường hợp $a = 0$, tức $m = 2$: bất phương trình thành $3 > 0$ — luôn đúng, nhận $m = 2$.

Trường hợp $m \neq 2$: cần $\begin{cases} m-2 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$ với $\Delta' = (m-2)^2 - 3(m-2) = (m-2)(m-5)$. Ta có $m-2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$ và $(m-2)(m-5) < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 5$, nên $2 < m < 5$.

Hợp hai trường hợp: $2 \leq m < 5$. (Nối B7: điều kiện theo Δ · B6: khi $a = 0$ bài tự về hằng/nhị thức.)

Ví dụ 5. Một quả bóng được ném thẳng đứng lên cao; độ cao (mét) sau t giây là $h(t) = -5t^2 + 15t + 10$ ($t \geq 0$). a) Tìm độ cao lớn nhất của quả bóng. b) Trong khoảng thời gian nào quả bóng ở độ cao lớn hơn 20 mét?

Lời giải. a) $h(t) = -5\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{85}{4} \leq \frac{85}{4} = 21,25$, dấu “=” tại $t = \frac{3}{2}$. Vậy độ cao lớn nhất là 21,25 m (đánh giá bằng cách đưa về bình phương).

b) $h(t) > 20 \Leftrightarrow -5t^2 + 15t + 10 > 20 \Leftrightarrow -5t^2 + 15t - 10 > 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 2$. Vậy quả bóng ở độ cao trên 20 m trong khoảng từ giây thứ 1 đến giây thứ 2. (Nối B5: chặn trên bằng bình phương · B7: BPT bậc hai.)

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - x - 6} < x$.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2 - x - 6 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 3 \\ x > 0 \\ -x - 6 < 0 \text{ (luôn đúng khi } x > 0) \end{cases}$$



3 ba điều kiện: $x \geq 3$. Vậy $S = [3; +\infty)$. (Nối B7: đưa căn về bậc hai, ĐKXD · B6: xét dấu & đối chiếu điều kiện về phải.)