



HIỂU KHỞI ĐỘNG — BÀI 7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Toán 10 — Chương II. Bất đẳng thức và bất phương trình

Họ và tên: Lớp:

★ 0. KHỞI ĐỘNG — KIỂM TRA KIẾN THỨC NỀN (5–7 phút)

Câu 1. Giải phương trình bậc hai $x^2 - 5x + 6 = 0$ (tìm hai nghiệm) và tính biệt thức Δ . Hệ số a của x^2 mang dấu gì?

Câu 2. Phân tích tam thức $2x^2 - 5x + 3$ thành tích hai nhân tử bậc nhất (gợi ý: tìm nghiệm trước).

Câu 3. Parabol $y = x^2 - 4x + 3$ cắt trục hoành tại những điểm nào? Với những giá trị nào của x thì parabol nằm *phía dưới* trục hoành (tức $y < 0$)?

Câu 4. Lập bảng xét dấu của nhị thức bậc nhất $f(x) = 3 - 2x$: với giá trị nào của x thì $f(x) > 0$, với giá trị nào thì $f(x) < 0$?

Câu 5. Điền vào chỗ trống (với $a > 0$):

$$|x| < a \Leftrightarrow \dots\dots; \quad |x| \geq a \Leftrightarrow \dots\dots; \quad \sqrt{A} \text{ xác định} \Leftrightarrow \dots\dots$$



BÀI 7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bài giảng Toán 10 — Chương II. Bất đẳng thức và bất phương trình

★ A. LÝ THUYẾT

1. Tam thức bậc hai và định lí về dấu

1. Dấu của tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Nghiệm của tam thức là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$; biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$).

Định lí về dấu của tam thức bậc hai. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

- Nếu $\Delta < 0$: $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta = 0$: $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$ (nghiệm kép), và $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.
- Nếu $\Delta > 0$: $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$; khi đó $f(x)$ trái dấu với a khi $x_1 < x < x_2$ và cùng dấu với a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

Ghi nhớ gọn: “trong trái, ngoài cùng” (trong khoảng hai nghiệm thì trái dấu a , ngoài thì cùng dấu a). Bảng xét dấu khi $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	cùng dấu a	0	trái dấu a	0	cùng dấu a

Ví dụ 1. Xét dấu tam thức $f(x) = -x^2 - 2x + 3$.

Lời giải. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 1$; hệ số $a = -1 < 0$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy $f(x) > 0$ khi $x \in (-3; 1)$; $f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; $f(x) = 0$ khi $x = -3$ hoặc $x = 1$.

2. Bất phương trình bậc hai một ẩn

2. Giải bất phương trình bậc hai bằng xét dấu

Bất phương trình bậc hai một ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0 \quad (a \neq 0).$$

Cách giải: xét dấu tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ rồi chọn khoảng làm cho bất phương trình đúng. Với bất phương trình tích hoặc thương, ta chuyển hết về một vế (so với 0), phân tích thành tích/thương các tam thức rồi lập bảng xét dấu chung (nhớ mẫu $\neq 0$).

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $-x^2 + 2x + 3 < 0$.

Lời giải. Tam thức $-x^2 + 2x + 3$ có nghiệm $x = -1$, $x = 3$ và $a = -1 < 0$, nên nó âm khi x nằm ngoài đoạn $[-1; 3]$. Vậy tập nghiệm $S = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

3. Bất phương trình quy về bậc hai (chứa căn, chứa giá trị tuyệt đối)



Đưa về bậc hai

Chứa dấu giá trị tuyệt đối (với B là biểu thức, $B \geq 0$ khi cần):

$$|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B; \quad |A| > B \Leftrightarrow A < -B \text{ hoặc } A > B.$$

Hoặc phá dấu $|\cdot|$ theo từng khoảng (xét dấu biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối).

Chứa căn thức. Luôn đặt *điều kiện xác định* và *xét dấu về còn lại* trước khi bình phương:

$$\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}; \quad \sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases}$$

(dấu $<, \leq, >, \geq$ ở đầu mút điều chỉnh tương ứng).

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2$.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 5 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases}$$

(ở bước cuối: $x^2 - 3x - 10 < x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x < 14$). Giao ba điều kiện được $5 \leq x < 14$. Vậy $S = [5; 14)$.

4. Tham số: bất phương trình bậc hai nghiệm đúng với mọi x / vô nghiệm

4. Điều kiện tham số

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \forall x &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}; & f(x) \geq 0 \forall x &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}; \\ f(x) < 0 \forall x &\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}; & f(x) \leq 0 \forall x &\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Chú ý. Khi hệ số a chứa tham số, phải **xét riêng trường hợp** $a = 0$ (khi đó f là nhị thức bậc nhất) trước khi dùng Δ . Ngoài ra: “ $f(x) > 0$ vô nghiệm” $\Leftrightarrow f(x) \leq 0 \forall x$; “ $f(x) < 0$ vô nghiệm” $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \forall x$.

Ví dụ 4. Tìm m để $x^2 + (2m + 1)x + m^2 + 3 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Vì $a = 1 > 0$ (cố định), bất phương trình đúng với mọi x khi và chỉ khi $\Delta < 0$:

$$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + 3) = 4m - 11 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{11}{4}.$$

Vậy $m < \frac{11}{4}$.



Chú ý. Bốn điểm dễ sai:

- (i) Dấu tam thức phụ thuộc **cả** a **lẫn** Δ : đừng chỉ nhìn Δ . Khi $\Delta < 0$ tam thức *giữ nguyên dấu của* a , không phải “luôn dương”.
- (ii) Tam thức vô nghiệm ($\Delta < 0$) với $a > 0$ thì $ax^2 + bx + c > 0 \forall x$, nên bất phương trình $ax^2 + bx + c > 0$ có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$ — **không** phải “vô nghiệm”.
- (iii) Hệ số bậc hai chứa tham số: **phải xét riêng** $a = 0$. Bỏ sót trường hợp này là lỗi phổ biến nhất.
- (iv) Bất phương trình chứa căn: **đặt điều kiện xác định và xét dấu vế phải** trước khi bình phương; nếu vế phải có thể âm phải chia trường hợp. Chú ý đầu mút đóng/mở theo dấu $<$ hay $\leq$.



B. CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP

■ DẠNG 1. Xét dấu tam thức bậc hai

Phương pháp. Tìm nghiệm của tam thức (giải $ax^2 + bx + c = 0$) và xác định dấu hệ số a . Lập bảng xét dấu theo định lí: $\Delta < 0$ thì cùng dấu a khắp nơi; $\Delta = 0$ thì cùng dấu a trừ nghiệm kép; $\Delta > 0$ thì “trong trái, ngoài cùng”.

Luyện tập 1.1. Lập bảng xét dấu $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

Luyện tập 1.2. Lập bảng xét dấu $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

Luyện tập 1.3. Lập bảng xét dấu $f(x) = (2x - 1)(-x + 3)$.

■ DẠNG 2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

Phương pháp. Chuyển bất phương trình về dạng so sánh tam thức với 0, xét dấu tam thức rồi chọn khoảng thỏa. Lưu ý ba trường hợp đặc biệt: $\Delta < 0$ (tam thức giữ nguyên dấu $a \Rightarrow$ tập nghiệm là $\mathbb{R}$ hoặc $\emptyset$); $\Delta = 0$ (nghiệm kép). Kết luận rõ tập nghiệm bằng khoảng/đoạn.

Luyện tập 2.1. Giải $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

Luyện tập 2.2. Giải $-2x^2 + 3x + 5 > 0$.

Luyện tập 2.3. Giải $3x^2 + x + 1 < 0$.

■ DẠNG 3. Giải bất phương trình quy về bậc hai (căn / giá trị tuyệt đối)

Phương pháp. Với giá trị tuyệt đối: dùng $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$, $|A| > B \Leftrightarrow A < -B \vee A > B$, hoặc phá dấu theo khoảng. Với căn thức: đặt điều kiện xác định, xét dấu về còn lại rồi mới bình phương; nếu về đối chiếu có thể âm phải chia trường hợp. Đối chiếu điều kiện, kết luận tập nghiệm.

Luyện tập 3.1. Giải $2x^2 - |5x - 3| < 0$.

Luyện tập 3.2. Giải $\sqrt{x^2 + x - 12} < 8 - x$.

Luyện tập 3.3. Giải $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$.

■ DẠNG 4. Tìm tham số để bất phương trình nghiệm đúng (hoặc vô nghiệm)

Phương pháp. Đưa về dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ giữ nguyên một dấu với mọi x . **Xét riêng** $a = 0$ (nếu hệ số bậc hai chứa tham số); với $a \neq 0$ dùng bảng điều kiện $\{a > 0, \Delta < 0\} \dots$ (mục A.4). Nhớ chuyển “vô nghiệm” của một bất phương trình sang “bất phương trình ngược lại đúng với mọi x ”.

Luyện tập 4.1. Tìm m để $3x^2 + 2(m - 1)x + m + 4 > 0$ nghiệm đúng với mọi x .

Luyện tập 4.2. Tìm m để $x^2 + (m + 1)x + 2m + 7 > 0$ nghiệm đúng với mọi x .

Luyện tập 4.3. Tìm m để $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 < 0$ vô nghiệm.

■ DẠNG 5. Bài toán thực tế về bất phương trình bậc hai



hướng pháp. Đặt ẩn cho đại lượng cần tìm, lập bất phương trình bậc hai theo mô hình (độ cao, diện tích, lợi nhuận...), giải rồi *đối chiếu điều kiện thực tế* (thời gian ≥ 0 , độ dài > 0 ...) và trả lời theo ngữ cảnh.

Luyện tập 5.1. Một quả bóng ném thẳng đứng lên cao, độ cao (mét) sau t giây là $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$. Trong khoảng thời gian nào quả bóng ở độ cao *không thấp hơn* 16 mét?

Luyện tập 5.2. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 80 m. Gọi x (m) là chiều dài. Tìm điều kiện của x để diện tích mảnh đất *không nhỏ hơn* 375 m^2 .

Luyện tập 5.3. Lợi nhuận (nghìn đồng) khi bán x sản phẩm của một cửa hàng là $P(x) = -x^2 + 120x - 2000$. Hỏi cửa hàng phải bán số sản phẩm x trong khoảng nào để *có lãi* (tức $P(x) > 0$)?



★ C. PHIẾU BÀI TẬP

Bài 1. Lập bảng xét dấu tam thức $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

Bài 2. Giải bất phương trình $x^2 - 4x + 4 > 0$.

Bài 3. Giải bất phương trình $(4 - 2x)(x^2 + 7x + 12) < 0$.

Bài 4. Giải bất phương trình $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x + 6} < 1$.

Bài 5. Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 - 7x + 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0. \end{cases}$$

Bài 6. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 4} \leq x - 1$.

Bài 7. Tìm m để $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 8. Một xưởng sản xuất x (chục) sản phẩm mỗi ngày thì lợi nhuận (triệu đồng) là $P(x) = -2x^2 + 28x - 90$. Tìm x để xưởng *không bị lỗ* ($P(x) \geq 0$).

Bài 9. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

Bài 10. (Bẫy) Bạn An giải $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$ bằng cách bình phương ngay hai vế: “ $x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x > \frac{9}{2}$, vậy $S = \left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$ ”. Lời giải này *thiếu* nghiệm. Hãy chỉ ra chỗ sai và giải lại cho đúng.



★ D. KIỂM TRA CƠ BẢN (15 phút)

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ là

- A) $[1; 2]$.
- B) $[-1; 2]$.
- C) $(1; 2)$.
- D) $[-2; 1]$.

Câu 2. Với x thuộc tập hợp nào thì tam thức $f(x) = x^2 - 6x + 8$ không dương?

- A) $[2; 3]$.
- B) $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$.
- C) $[2; 4]$.
- D) $[1; 4]$.

Câu 3. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

- A) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.
- B) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
- C) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.
- D) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của m để $f(x) = x^2 + 4x + m - 5$ luôn dương.

- A) $m < 9$.
- B) $m \geq 9$.
- C) $m > 9$.
- D) $m \in \emptyset$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + 4m + 8 < 0$ vô nghiệm.

- A) $(-1; 7)$.
- B) $[-1; 7]$.
- C) $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$.
- D) $(-1; +\infty)$.

Câu 6. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$ là

- A) 1.
- B) 2.
- C) 3.
- D) 4.

Câu 7. Một nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x - 2 \leq 0$ là

- A) $x = 2$.
- B) $x = 3$.
- C) $x = 4$.



$$x = 5.$$

Câu 8. Xét tính đúng, sai của mỗi khẳng định (ghi Đ/S):

- a) Tam thức $f(x) = x^2 - x + 1$ dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- b) Bất phương trình $3x^2 + x + 1 < 0$ vô nghiệm.
- c) Nếu $\Delta = 0$ thì tam thức $ax^2 + bx + c$ cùng dấu với a với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- d) Bất phương trình $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ có tập nghiệm $[2; 3]$.

Câu 9. (Trả lời ngắn) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $x^2 - 2(m + 3)x - 2m + 1 < 0$ vô nghiệm?



E. NÂNG CAO

Nâng cao 1. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(2m^2 + m - 6)x^2 + (2m - 3)x - 1 > 0$ vô nghiệm.

Nâng cao 2. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left| \frac{2 - 3|x|}{1 + x} \right| \leq 1$.

Nâng cao 3. Giải bất phương trình $\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} \geq \sqrt{2x - 5}$.

Nâng cao 4. Cho phương trình $\sqrt{2x + m} = x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng lớn hơn 1.



F. LỜI GIẢI

Khởi động

Câu 1. $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$; $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$; $a = 1 > 0$. **Câu 2.** $2x^2 - 5x + 3$ có nghiệm $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ nên $2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$.

Câu 3. $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $x = 3$: parabol cắt Ox tại $(1; 0)$, $(3; 0)$; nằm dưới trục hoành khi $1 < x < 3$. **Câu 4.** $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$; $3 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$. **Câu 5.** $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$; $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ hoặc $x \geq a$; $\sqrt{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \geq 0$.

Luyện tập (phần B)

LT 1.1. $2x^2 - 5x + 3$ có nghiệm $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$; $a = 2 > 0$.

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$

Vậy $f(x) > 0$ khi $x < 1$ hoặc $x > \frac{3}{2}$; $f(x) < 0$ khi $1 < x < \frac{3}{2}$.

LT 1.2. $-x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$ có nghiệm kép $x = 2$, $a = -1 < 0$. Do đó $f(x) < 0$ với mọi $x \neq 2$ và $f(2) = 0$ (không có giá trị dương).

LT 1.3. $f(x) = (2x - 1)(-x + 3)$ có nghiệm $x = \frac{1}{2}$, $x = 3$; khai triển $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$ nên $a = -2 < 0$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$

Vậy $f(x) > 0$ khi $\frac{1}{2} < x < 3$; $f(x) < 0$ khi $x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > 3$.

LT 2.1. $x^2 - 5x + 6 \leq 0$: tam thức có nghiệm $2; 3$, $a > 0$ nên ≤ 0 trong đoạn hai nghiệm. $S = [2; 3]$.

LT 2.2. $-2x^2 + 3x + 5 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 < 0$; nghiệm $x = -1$, $x = \frac{5}{2}$, $a > 0$ nên < 0 giữa hai nghiệm. $S = \left(-1; \frac{5}{2}\right)$.

LT 2.3. $3x^2 + x + 1$ có $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$ và $a = 3 > 0$ nên $3x^2 + x + 1 > 0$ với mọi x . Bất phương trình $3x^2 + x + 1 < 0$ vô nghiệm: $S = \emptyset$.

LT 3.1. $2x^2 - |5x - 3| < 0 \Leftrightarrow 2x^2 < |5x - 3|$. Trường hợp $x \geq \frac{3}{5}$: $2x^2 < 5x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{3}{2}$ (thỏa $x \geq \frac{3}{5}$). Trường hợp $x < \frac{3}{5}$: $2x^2 < 3 - 5x \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < \frac{1}{2}$ (thỏa $x < \frac{3}{5}$). Vậy $S = \left(-3; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

LT 3.2. $\sqrt{x^2 + x - 12} < 8 - x$ tương đương hệ

$$\begin{cases} x^2 + x - 12 \geq 0 \\ 8 - x > 0 \\ x^2 + x - 12 < (8 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \text{ hoặc } x \geq 3 \\ x < 8 \\ 17x < 76 \end{cases}$$



$x^2 + x - 12 < 64 - 16x + x^2 \Leftrightarrow 17x < 76 \Leftrightarrow x < \frac{76}{17}$. Giao lại được $x \leq -4$ hoặc $3 \leq x < \frac{76}{17}$.

Vậy $S = (-\infty; -4] \cup \left[3; \frac{76}{17}\right)$.

LT 3.3. $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$. Điều kiện $x^2 - 3x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ hoặc $x \geq 5$. Trường hợp $x - 2 < 0$ (tức $x < 2$): bất phương trình luôn đúng khi căn xác định, cho $x \leq -2$. Trường hợp $x - 2 \geq 0$ (tức $x \geq 2$): bình phương $x^2 - 3x - 10 > x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x > 14$; kết hợp $x \geq 5$ được $x > 14$. Vậy $S = (-\infty; -2] \cup (14; +\infty)$.

LT 4.1. $a = 3 > 0$ cố định; cần $\Delta' < 0$: $\Delta' = (m - 1)^2 - 3(m + 4) = m^2 - 5m - 11 < 0 \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{69}}{2} < m < \frac{5 + \sqrt{69}}{2}$.

LT 4.2. $a = 1 > 0$ cố định; cần $\Delta < 0$: $\Delta = (m + 1)^2 - 4(2m + 7) = m^2 - 6m - 27 < 0 \Leftrightarrow (m + 3)(m - 9) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 9$.

LT 4.3. “ $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 < 0$ vô nghiệm” $\Leftrightarrow (m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 \geq 0 \forall x$. Nếu $m = -2$: biểu thức là $6x + 4$, nhận giá trị âm — loại. Nếu $m \neq -2$: cần $m + 2 > 0$ và $\Delta' = (m - 1)^2 - 4(m + 2) = m^2 - 6m - 7 = (m - 7)(m + 1) \leq 0$, tức $m > -2$ và $-1 \leq m \leq 7$. Vậy $m \in [-1; 7]$.

LT 5.1. $h(t) \geq 16 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t + 1 \geq 16 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t - 15 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3$. Vậy quả bóng ở độ cao không thấp hơn 16 m trong khoảng thời gian từ giây thứ 1 đến giây thứ 3.

LT 5.2. Chu vi 80 m nên nửa chu vi 40; chiều rộng $= 40 - x$. Diện tích $x(40 - x) \geq 375 \Leftrightarrow -x^2 + 40x - 375 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 375 \leq 0 \Leftrightarrow 15 \leq x \leq 25$ (hai nghiệm 15; 25). Vậy chiều dài $x \in [15; 25]$ (m).

LT 5.3. $P(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 120x - 2000 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 120x + 2000 < 0$; hai nghiệm 20; 100, $a > 0$ nên $20 < x < 100$. Vậy cửa hàng có lãi khi bán từ 21 đến 99 sản phẩm (số nguyên x với $20 < x < 100$).

Phiếu bài tập (phần C)

Bài 1. $3x^2 + 2x - 5 = (x - 1)(3x + 5)$ có nghiệm $x = 1$, $x = -\frac{5}{3}$; $a = 3 > 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	1	$+\infty$
$f(x)$		+	0	- 0 +

Vậy $f(x) > 0$ khi $x < -\frac{5}{3}$ hoặc $x > 1$; $f(x) < 0$ khi $-\frac{5}{3} < x < 1$.

Bài 2. $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Vậy $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Bài 3. $(4 - 2x)(x^2 + 7x + 12) < 0 \Leftrightarrow -2(x - 2)(x + 3)(x + 4) < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3)(x + 4) > 0$. Xét dấu tích với các nghiệm -4 ; -3 ; 2 (bậc ba, hệ số cao nhất dương): tích dương khi $-4 < x < -3$ hoặc $x > 2$. Vậy $S = (-4; -3) \cup (2; +\infty)$.

Bài 4. Chuyển vế: $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x + 6} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 10}{x^2 - 5x + 6} < 0 \Leftrightarrow \frac{2(x - 5)}{(x - 2)(x - 3)} < 0$. Xét dấu với các mốc 2; 3; 5:

x	$-\infty$	2	3	5	$+\infty$			
VT		-		+		-	0	+

Vậy $S = (-\infty; 2) \cup (3; 5)$.

Bài 5. $3x^2 - 7x + 2 > 0$ có nghiệm $\frac{1}{3}$; 2 , $a > 0$ nên $x < \frac{1}{3}$ hoặc $x > 2$. $-2x^2 + x + 3 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 < 0$ có nghiệm -1 ; $\frac{3}{2}$ nên $-1 < x < \frac{3}{2}$. Giao hai tập: $S = \left(-1; \frac{1}{3}\right)$.



Bài 6. $\sqrt{x^2 - 4} \leq x - 1$ tương đương hệ $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 4 \leq (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 2 \\ x \geq 1 \\ 2x \leq 5 \end{cases} \quad (\text{vì})$

$x^2 - 4 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$. Giao lại: $2 \leq x \leq \frac{5}{2}$. Vậy $S = \left[2; \frac{5}{2}\right]$.

Bài 7. Cần $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) > 0 \forall x$. Nếu $m = 1$: biểu thức là $-4x - 3$, không dương với mọi x — loại. Nếu $m \neq 1$: cần $m - 1 > 0$ và $\Delta' < 0$. Ta có $\Delta' = (m + 1)^2 - 3(m - 1)(m - 2) = -2m^2 + 11m - 5$, nên $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 11m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$ hoặc $m > 5$. Kết hợp $m > 1$ được $m > 5$. Vậy $m \in (5; +\infty)$.

Bài 8. $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 28x - 90 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 45 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x - 9) \leq 0 \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 9$. Vậy sản lượng $x \in [5; 9]$ (chục sản phẩm) thì xưởng không bị lỗ.

Bài 9. Hàm xác định $\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0$; tam thức có nghiệm $\frac{1}{2}; 2, a > 0$ nên $x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $x \geq 2$. Vậy $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Bài 10. *Chỗ sai*: khi bình phương ngay, bạn An *ngầm giả sử về phải* $x - 3 \geq 0$; nếu $x - 3 < 0$ mà căn ≥ 0 thì bất phương trình vẫn đúng — phần này bị bỏ sót. *Giải lại*: điều kiện $x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ hoặc $x \geq 4$. Trường hợp $x - 3 < 0$ (tức $x < 3$): bất phương trình đúng khi căn xác định, cho $x \leq 0$. Trường hợp $x - 3 \geq 0$ (tức $x \geq 3$): bình phương $x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x > \frac{9}{2}$; kết hợp $x \geq 3$ (và $x \geq 4$) được $x > \frac{9}{2}$. Vậy $S = (-\infty; 0] \cup \left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Kiểm tra cơ bản (phần D)

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	A	C	B	C	B	A	A

Câu 1. Chọn A. $-x^2 + 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Câu 2. Chọn C. “Không dương” nghĩa là ≤ 0 : $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ có nghiệm 2; 4, $a > 0$ nên $2 \leq x \leq 4$.

Câu 3. Chọn B. Parabol hướng lên ($a > 0$) và không cắt trục hoành ($\Delta < 0$) thì luôn nằm trên trục hoành.

Câu 4. Chọn C. $a = 1 > 0$; cần $\Delta < 0$: $16 - 4(m - 5) = 36 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > 9$.

Câu 5. Chọn B. “ < 0 vô nghiệm” $\Leftrightarrow x^2 - 2(m - 1)x + 4m + 8 \geq 0 \forall x \Leftrightarrow \Delta' \leq 0$: $(m - 1)^2 - (4m + 8) = m^2 - 6m - 7 = (m - 7)(m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 7$.

Câu 6. Chọn A. $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$ cần $x \geq 2$; bình phương $x^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa). Có đúng 1 nghiệm.

Câu 7. Chọn A. $x^2 - 2x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3} (\approx [-0,73; 2,73])$. Chỉ $x = 2$ nằm trong đoạn này.

Câu 8. a) Đ ($\Delta = -3 < 0, a > 0$). b) Đ ($\Delta = -11 < 0, a > 0$ nên $3x^2 + x + 1 > 0 \forall x$). c) S (khi $\Delta = 0$ tam thức cùng dấu a với mọi x trừ nghiệm kép, tại đó bằng 0). d) Đ ($x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$).

Câu 9. “ < 0 vô nghiệm” $\Leftrightarrow x^2 - 2(m + 3)x - 2m + 1 \geq 0 \forall x \Leftrightarrow \Delta' \leq 0$: $(m + 3)^2 - (-2m + 1) = m^2 + 8m + 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 - 2\sqrt{2} \leq m \leq -4 + 2\sqrt{2} (\approx [-6,83; -1,17])$. Các số nguyên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2\}$. **Đáp số**: 5.

Nâng cao (phần E)

NC 1. “ > 0 vô nghiệm” $\Leftrightarrow (2m^2 + m - 6)x^2 + (2m - 3)x - 1 \leq 0 \forall x$. Chú ý $2m^2 + m - 6 = (2m - 3)(m + 2)$. Nếu $m = \frac{3}{2}$: biểu thức là $-1 \leq 0$ — thỏa. Nếu $m = -2$: biểu thức là $-7x - 1$, nhận



trị dương — loại. Nếu $m \neq \frac{3}{2}$, $m \neq -2$: cần $a = (2m - 3)(m + 2) < 0$ (tức $-2 < m < \frac{3}{2}$) và $\Delta = (2m - 3)^2 + 4(2m^2 + m - 6) = 12m^2 - 8m - 15 \leq 0$ (tức $-\frac{5}{6} \leq m \leq \frac{3}{2}$). Giao lại: $-\frac{5}{6} \leq m < \frac{3}{2}$.
Hợp với $m = \frac{3}{2}$: $\boxed{-\frac{5}{6} \leq m \leq \frac{3}{2}}$.

NC 2. Điều kiện $x \neq -1$. Thử các số nguyên: $x = 1$ cho $\left| \frac{2-3}{2} \right| = \frac{1}{2} \leq 1$ (nhận); $x = 0$ cho $|2| = 2 > 1$ (loại). Với $|x| \geq 2$ thì từ $|2 - 3x| \geq 4$ còn mẫu $|1 + x| \leq |x| + 1$, dẫn tới tỉ số > 1 (loại); khi $|x| \rightarrow \infty$ tỉ số dần tới $3 > 1$. Vậy chỉ có $x = 1$: bất phương trình có 1 nghiệm nguyên.

NC 3. Điều kiện $x + 6 \geq 0$, $x + 1 \geq 0$, $2x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$. Viết $\sqrt{x+6} \geq \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$ (hai vế không âm), bình phương:

$$x + 6 \geq (x + 1) + (2x - 5) + 2\sqrt{(x + 1)(2x - 5)} \Leftrightarrow 10 - 2x \geq 2\sqrt{(x + 1)(2x - 5)}.$$

Cần $5 - x \geq 0$ (tức $x \leq 5$) và bình phương tiếp: $(5 - x)^2 \geq (x + 1)(2x - 5) \Leftrightarrow x^2 + 7x - 30 \leq 0 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 3$. Giao với $\frac{5}{2} \leq x \leq 5$: $S = \left[\frac{5}{2}; 3 \right]$.

NC 4. Điều kiện $x - 1 \geq 0$ (vế phải không âm), tức $x \geq 1$. Bình phương: $2x + m = (x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + (1 - m) = 0$. Đặt $g(x) = x^2 - 4x + 1 - m$; cần hai nghiệm phân biệt cùng lớn hơn 1. Đỉnh parabol tại $x = 2 > 1$, nên chỉ cần

$$\Delta' = 4 - (1 - m) = 3 + m > 0 \quad \text{và} \quad g(1) = 1 - 4 + 1 - m = -2 - m > 0,$$

tức $m > -3$ và $m < -2$. Vậy $-3 < m < -2$.