



BÀI 5. BẤT ĐẲNG THỨC

★ Yêu cầu cần đạt

- Nắm được các tính chất của bất đẳng thức; chứng minh bất đẳng thức bằng phép biến đổi tương đương và bằng các bất đẳng thức cơ bản $a^2 \geq 0$, $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
- Vận dụng bất đẳng thức Cô-si (Cauchy) và bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- Sử dụng bất đẳng thức vào một số bài toán có điều kiện và bài toán thực tế (tìm cực trị của biểu thức).

👉 Bài tập luyện tập

Bài 1. Chứng minh bất đẳng thức bằng biến đổi tương đương. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh:

- $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$;
- $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$;
- $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$;
- $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^3$ với $a, b \geq 0$.

Bài 2. Chứng minh bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki.

- Chứng minh $3a^2 + 4b^2 \geq 7$, với $3a + 4b = 7$.
- Chứng minh $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$, với $a + 2b = 2$.
- Chứng minh $2a^2 + 3b^2 \geq 5$, với $2a + 3b = 5$.
- Chứng minh $(x - 2y + 1)^2 + (2x - 4y + 5)^2 \geq \frac{9}{5}$.

Bài 3. Chứng minh bất đẳng thức Cô-si. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

- $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$;
- $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$;
- $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$;
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng bất đẳng thức.

- Tìm GTNN của $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}$ với $x > 0$.
- Tìm GTNN của $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x - 1}$ với $x > 1$.
- Tìm GTLN của $y = (x + 3)(5 - x)$ với $-3 \leq x \leq 5$.
- Tìm GTLN của $y = x(6 - x)$ với $0 \leq x \leq 6$.

Bài 5. Bài toán ứng dụng bất đẳng thức (cực trị có điều kiện).

- Cho $a, b > 0$ và $a + b = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của tích ab .
- Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Tìm GTNN của $A = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$.
- Cho $x, y > 0$ và $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6$. Tìm GTNN của $B = x + y$.
- Tìm GTLN và GTNN của $A = \sqrt{7 - x} + \sqrt{2 + x}$ với $-2 \leq x \leq 7$.



Chú ý

- ✓ Bất đẳng thức Cô-si chỉ áp dụng cho các số **không âm**; dấu “=” xảy ra khi các số bằng nhau. Hệ quả: tổng không đổi thì tích lớn nhất, tích không đổi thì tổng nhỏ nhất (đều đạt khi các số bằng nhau).
- ✓ Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$; dấu “=” khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ (tức $ay = bx$). Thường dùng để chặn tổng bình phương khi biết một ràng buộc tuyến tính.
- ✓ Khi tìm GTLN/GTNN phải **kiểm tra dấu bằng xảy ra** (tồn tại giá trị biến thoả mãn) thì kết luận mới đúng.

QR đáp án	QR luyện tập thêm các chủ đề	QR đăng kí học Trực tuyến (Online) hoặc Trực tiếp (Offline)
		
Trực tiếp (Offline)...Địa chỉ: Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội Trực tuyến (Online)... Zoom/Google Meeting...		