



PHIẾU KHỞI ĐỘNG — BÀI 5. BẤT ĐẲNG THỨC

Toán 10 — Chương II. Bất đẳng thức và bất phương trình

Họ và tên: Lớp:

★ 0. KHỞI ĐỘNG — KIỂM TRA KIẾN THỨC NỀN (5–7 phút)

Câu 1. Khai triển và điền vào chỗ trống:

$$(a - b)^2 = \dots\dots\dots, \quad (a + b)^2 = \dots\dots\dots$$

Với mọi số thực a, b , biểu thức $(a - b)^2$ luôn *lớn hơn hoặc bằng* số nào?

Câu 2. Chứng tỏ $(x - 2)^2 + 3 \geq 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biểu thức đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu, tại x bằng bao nhiêu?

Câu 3. Không dùng máy tính, hãy so sánh hai số $a = 2\sqrt{3}$ và $b = 3\sqrt{2}$ (gợi ý: so sánh a^2 và b^2).

Câu 4. Viết biểu thức $a^2 - 2a + 1$ dưới dạng một bình phương, rồi cho biết dấu của nó.

Câu 5. Cho $a \geq 0, b \geq 0$. Xét bình phương $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ và chứng tỏ

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Dấu “=” xảy ra khi nào?



BÀI 5. BẤT ĐẲNG THỨC

Bài giảng Toán 10 — Chương II. Bất đẳng thức và bất phương trình

★ A. LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức và các tính chất

1. Khái niệm và tính chất

Cho hai số thực a, b . Ta nói $a > b$ (đọc là “ a lớn hơn b ”) nếu $a - b > 0$; tương tự cho $a \geq b$, $a < b$, $a \leq b$. Các mệnh đề dạng $a > b$, $a \geq b$, $a < b$, $a \leq b$ gọi là **bất đẳng thức**.

Tính chất cơ bản. Với a, b, c là các số thực:

- (1) *Bắc cầu*: nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.
- (2) *Cộng hai vế với cùng một số*: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.
- (3) *Nhân hai vế với số dương / âm*: nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$; nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$ (đổi chiều).
- (4) *Cộng hai BĐT cùng chiều*: nếu $a > b$ và $c > d$ thì $a + c > b + d$.
- (5) *Nhân hai BĐT cùng chiều các số dương*: nếu $a > b > 0$ và $c > d > 0$ thì $ac > bd$.

Ví dụ 1. Cho $a > b$. So sánh $3 - 2a$ và $3 - 2b$.

Lời giải. Từ $a > b$, nhân hai vế với $-2 < 0$ (đổi chiều): $-2a < -2b$; cộng 3 vào hai vế: $3 - 2a < 3 - 2b$.

2. Một số bất đẳng thức cơ bản

2. Các bất đẳng thức nền tảng

Với mọi số thực a, b :

$$a^2 \geq 0; \quad a^2 + b^2 \geq 2ab; \quad (a + b)^2 \geq 4ab.$$

Ngoài ra, nếu $ab > 0$ thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Mọi dấu “=” ở trên xảy ra khi $a = b$ (riêng $(a + b)^2 \geq 4ab$ và $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ đạt khi $a = b$).

Ví dụ 2. Chứng minh $a^2 + b^2 \geq 2ab$ với mọi a, b , rồi suy ra $(a + b)^2 \geq 4ab$.

Lời giải. Ta có $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$ nên $a^2 + b^2 \geq 2ab$; dấu “=” khi $a = b$. Cộng thêm $2ab$ vào hai vế: $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$, tức $(a + b)^2 \geq 4ab$.

3. Bất đẳng thức Cô-si (AM–GM)

3. Bất đẳng thức Cô-si

Với hai số không âm $a, b \geq 0$:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{tức } a + b \geq 2\sqrt{ab}),$$

dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Mở rộng cho ba số không âm $a, b, c \geq 0$:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$



dấu “=” khi $a = b = c$.

Hệ quả (điểm rơi). Nếu tổng $a + b$ không đổi thì tích ab lớn nhất khi $a = b$; nếu tích ab không đổi thì tổng $a + b$ nhỏ nhất khi $a = b$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = x + \frac{1}{x}$ với $x > 0$.

Lời giải. Vì $x > 0$ và $\frac{1}{x} > 0$, áp dụng Cô-si cho hai số dương:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{x}$, tức $x = 1$ (thỏa $x > 0$). Vậy $\min y = 2$ tại $x = 1$.

4. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

4. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

Với mọi số thực a, b, x, y :

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2),$$

dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$ (tức $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ khi $a, b \neq 0$).

Hệ quả (dạng cộng mẫu). Với $x, y > 0$ và mọi a, b :

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a + b)^2}{x + y},$$

dấu “=” khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$. Đây là công cụ mạnh để chặn dưới tổng các phân thức.

Ví dụ 4. Cho $a + 2b = 2$. Chứng minh $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$.

Lời giải. Áp dụng Bu-nhi-a-cốp-xki cho hai cặp $(1; 2)$ và $(a; b)$:

$$(a + 2b)^2 = (1 \cdot a + 2 \cdot b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2) = 5(a^2 + b^2).$$

Vì $a + 2b = 2$ nên $4 \leq 5(a^2 + b^2)$, suy ra $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$. Dấu “=” khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$ và $a + 2b = 2$, tức $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{4}{5}$.

5. Dùng bất đẳng thức tìm GTLN, GTNN

5. Tìm GTLN–GTNN bằng bất đẳng thức

Để tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) / lớn nhất (GTLN) của biểu thức P , ta thường:

- Chặn một phía: chứng minh $P \geq m$ (hoặc $P \leq M$) bằng một bất đẳng thức phù hợp;
- **Chỉ ra dấu “=” xảy ra** (điểm rơi): tồn tại giá trị của biến làm $P = m$ (hoặc $P = M$). Khi đó mới kết luận $\min P = m$ (hoặc $\max P = M$).

Thiếu bước điểm rơi thì chưa kết luận được GTNN/GTLN.



lụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}$ với $x > 0$.

Lời giải. Hai số $\frac{x}{2} > 0$ và $\frac{18}{x} > 0$; áp dụng Cô-si:

$$\frac{x}{2} + \frac{18}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{18}{x}} = 2\sqrt{9} = 6.$$

Dấu “=” khi $\frac{x}{2} = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6$ (do $x > 0$). Vậy min $y = 6$ tại $x = 6$.

Chú ý. Ba điểm dễ sai:

- (i) Bất đẳng thức **Cô-si chỉ áp dụng cho các số không âm**; Bu-nhi-a-cốp-xki phải gom *đúng dạng* $(ax + by)^2$. Áp dụng khi chưa đảm bảo điều kiện là sai.
- (ii) Muốn kết luận GTLN/GTNN phải **chỉ ra dấu “=” xảy ra** (điểm rơi tồn tại), không chỉ chặn một phía.
- (iii) Khi *cộng nhiều bất đẳng thức*, dấu “=” của kết quả chỉ đạt khi *tất cả* các dấu “=” thành phần xảy ra *đồng thời* — phải kiểm tra lại.



B. CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP

■ DẠNG 1. Chứng minh bất đẳng thức bằng biến đổi tương đương

Phương pháp. Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng *tương đương* mà vế trái trừ vế phải là một tổng các bình phương (hoặc tích các số cùng dấu) hiển nhiên không âm. Thường dùng $(a-b)^2 \geq 0$, $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$. Luôn nêu rõ dấu “=” xảy ra khi nào.

Luyện tập 1.1. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Luyện tập 1.2. Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

Luyện tập 1.3. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

■ DẠNG 2. Chứng minh bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

Phương pháp. Khi có ràng buộc tuyến tính (ví dụ $ma + nb = k$) cần chặn tổng bình phương, gom về dạng $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. Chọn hai cặp số hợp lí rồi thay ràng buộc vào. Dấu “=” khi $ay = bx$; nhớ kiểm tra điểm rơi thỏa ràng buộc.

Luyện tập 2.1. Cho $3a + 4b = 7$. Chứng minh $3a^2 + 4b^2 \geq 7$.

Luyện tập 2.2. Cho $a + 2b = 2$. Chứng minh $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$.

Luyện tập 2.3. Cho $2a + 3b = 5$. Chứng minh $2a^2 + 3b^2 \geq 5$.

■ DẠNG 3. Chứng minh bất đẳng thức Cô-si (trọng tâm)

Phương pháp. Nhóm các số dương thành từng cặp / bộ rồi áp dụng $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ hoặc $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Với biểu thức đối xứng, thường ghép $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ theo vòng rồi cộng lại. Luôn kiểm tra điều kiện số không âm và chỉ ra dấu “=” (thường $a=b=c$).

Luyện tập 3.1. Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Luyện tập 3.2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Luyện tập 3.3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$.

■ DẠNG 4. Tìm GTLN–GTNN bằng bất đẳng thức (trọng tâm)

Phương pháp. Với phân thức có dạng “số hạng + nghịch đảo” dùng Cô-si hai số (tách để tích không đổi); với tích hai thừa số có tổng không đổi dùng $(x+y)/2 \geq \sqrt{xy}$. Sau khi chặn phải tìm điểm rơi và kiểm tra dấu “=” đạt được.

Luyện tập 4.1. Tìm GTNN của $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}$ với $x > 0$.

Luyện tập 4.2. Tìm GTLN của $y = (x+3)(5-x)$ với $-3 \leq x \leq 5$.

Luyện tập 4.3. Tìm GTNN của $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$.



ANG 5. Bài toán ứng dụng bất đẳng thức thực tế

Phương pháp. Đặt ẩn cho đại lượng cần tối ưu, *lập biểu thức* theo ràng buộc thực tế (chu vi, thể tích, diện tích...), rồi dùng Cô-si để tìm cực trị. Nhớ đối chiếu *điều kiện thực tế* (độ dài, diện tích > 0) và kết luận kích thước tại điểm rơi.

Luyện tập 5.1. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 40 m. Hỏi diện tích lớn nhất của mảnh vườn bằng bao nhiêu và khi đó hai kích thước bằng bao nhiêu?

Luyện tập 5.2. Người ta muốn rào một mảnh đất hình chữ nhật dọc theo một bờ sông thẳng (*cạnh giáp sông không phải rào*) bằng 100 m lưới. Tìm diện tích lớn nhất có thể rào được.

Luyện tập 5.3. Một sợi dây thép dài 8 m được uốn thành khung một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu?



★ C. PHIẾU BÀI TẬP

Bài 1. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

Bài 3. Chứng minh $(x - 2y + 1)^2 + (2x - 4y + 5)^2 \geq \frac{9}{5}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$.

Bài 5. Tìm GTLN của $y = x(6 - x)$ với $0 \leq x \leq 6$.

Bài 6. Cho $a, b > 0$ và $a + b = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của tích ab .

Bài 7. Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Tìm GTNN của $A = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$.

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{7 - x} + \sqrt{2 + x}$ với $-2 \leq x \leq 7$.

Bài 9. Một chiếc hộp hình hộp chữ nhật *không nắp*, đáy là hình vuông cạnh x (dm), có thể tích 4 dm^3 . Hỏi phải chọn x bằng bao nhiêu để tổng diện tích tôn làm hộp (một đáy và bốn mặt bên) là nhỏ nhất? Khi đó diện tích ấy bằng bao nhiêu?

Bài 10. (Bẫy) Một bạn lập luận: “Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, $x + \frac{1}{x} \geq 2$; vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x) = x + \frac{1}{x}$ bằng 2.” Lập luận này *đúng* hay *sai*? Giải thích.



★ D. KIỂM TRA CƠ BẢN (15 phút)

Câu 1. Với mọi số thực a, b , khẳng định nào sau đây *luôn đúng*?

- A) $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
- B) $a^2 + b^2 \leq 2ab$.
- C) $2ab \geq a^2 + b^2$.
- D) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ chỉ khi $ab > 0$.

Câu 2. Bất đẳng thức Cô-si $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ áp dụng được khi

- A) $a \geq 0$ và $b \geq 0$.
- B) a, b tùy ý.
- C) $a \leq 0$ và $b \leq 0$.
- D) $ab \geq 0$.

Câu 3. Với $x > 0$, giá trị nhỏ nhất của $x + \frac{9}{x}$ bằng

- A) 6.
- B) 9.
- C) 3.
- D) 18.

Câu 4. Với $-4 \leq x \leq 2$, giá trị lớn nhất của $(2-x)(x+4)$ bằng

- A) 6.
- B) 9.
- C) 8.
- D) 12.

Câu 5. Cho $a, b > 0$ và $a + b = 2$. Giá trị lớn nhất của tích ab bằng

- A) 1.
- B) 2.
- C) 4.
- D) $\frac{1}{2}$.

Câu 6. Cho $a, b > 0$. Dấu “=” trong bất đẳng thức $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ xảy ra khi và chỉ khi

- A) $a = b$.
- B) $a = -b$.
- C) $ab = 1$.
- D) $a = 2b$.

Câu 7. Với $x > 0$, giá trị nhỏ nhất của $\frac{(x+1)^2}{x}$ bằng

- A) 2.
- B) 4.
- C) 1.
- D) 3.

Câu 8. Xét tính đúng, sai của mỗi khẳng định (ghi Đ/S):

- a) Với mọi số thực a ta có $a^2 \geq 0$.



Với mọi $a, b > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

c) Áp dụng Cô-si cho hai số -2 và -8 được $\frac{-2 + (-8)}{2} \geq \sqrt{(-2)(-8)}$.

d) Nếu $a, b > 0$ và $a + b = 10$ thì $ab \leq 25$.

Câu 9. (Trả lời ngắn) Cho $a, b > 0$ và $ab = 16$. Giá trị nhỏ nhất của $a + b$ bằng bao nhiêu?



E. NÂNG CAO

Nâng cao 1. Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy}$.

Nâng cao 2. Cho $x, y > 0$. Chứng minh $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$.

Nâng cao 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Nâng cao 4. (HSG) Cho $a, b, c > 0$ thoả $abc = 1$. Chứng minh

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$



F. LỜI GIẢI

Khởi động

Câu 1. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 \geq 0$ với mọi a, b . **Câu 2.** Vì $(x - 2)^2 \geq 0$ nên $(x - 2)^2 + 3 \geq 3$; GTNN bằng 3, đạt tại $x = 2$. **Câu 3.** $a^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$, $b^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$; do $a, b > 0$ và $12 < 18$ nên $a < b$. **Câu 4.** $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0$. **Câu 5.** $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$; dấu “=” khi $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, tức $a = b$.

Luyện tập (phần B)

LT 1.1. Nhân đôi hai vế: cần chứng minh $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$, tương đương

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0,$$

luôn đúng. Dấu “=” khi $a = b = c$.

LT 1.2. Nhân đôi hai vế và chuyển vế: cần $2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$, tương đương

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0,$$

luôn đúng. Dấu “=” khi $a = b = 1$.

LT 1.3. Bất đẳng thức tương đương (nhân 8 hai vế) $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$. Vì $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ nên bất đẳng thức thành $3(a^3 + b^3) \geq 3ab(a + b)$, tức $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$. Ta có

$$a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) = (a + b)(a - b)^2 \geq 0$$

vì $a, b \geq 0$. Dấu “=” khi $a = b$.

LT 2.1. Bu-nhi-a-cốp-xki cho hai cặp $(\sqrt{3}; 2)$ và $(\sqrt{3}a; 2b)$:

$$(3a + 4b)^2 = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}a + 2 \cdot 2b)^2 \leq (3 + 4)(3a^2 + 4b^2) = 7(3a^2 + 4b^2).$$

Vì $3a + 4b = 7$ nên $49 \leq 7(3a^2 + 4b^2)$, suy ra $3a^2 + 4b^2 \geq 7$. Dấu “=” khi $a = b$, kết hợp $3a + 4b = 7$ được $a = b = 1$.

LT 2.2. Xem Ví dụ 4 (phần A): $(a + 2b)^2 \leq 5(a^2 + b^2)$, mà $a + 2b = 2$ nên $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$; dấu “=” tại $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{4}{5}$.

LT 2.3. Bu-nhi-a-cốp-xki cho $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ và $(\sqrt{2}a; \sqrt{3}b)$:

$$(2a + 3b)^2 \leq (2 + 3)(2a^2 + 3b^2) = 5(2a^2 + 3b^2).$$

Vì $2a + 3b = 5$ nên $25 \leq 5(2a^2 + 3b^2)$, suy ra $2a^2 + 3b^2 \geq 5$; dấu “=” khi $a = b = 1$.

LT 3.1. Với $a, b > 0$, theo Cô-si $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$. Nhân hai vế (các số dương):

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}.$$

Dấu “=” khi $a = b$.

LT 3.2. Với $a, b, c > 0$: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, $c + a \geq 2\sqrt{ca}$. Nhân ba bất đẳng thức cùng dương:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

Dấu “=” khi $a = b = c$.



3.3. Ghép từng cặp theo Cô-si:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c, \quad \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a, \quad \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b.$$

Cộng ba bất đẳng thức rồi chia 2: $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$. Dấu “=” khi $a = b = c$.

LT 4.1. $\frac{x}{2} > 0, \frac{18}{x} > 0$; Cô-si: $\frac{x}{2} + \frac{18}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{18}{x}} = 6$. Dấu “=” khi $\frac{x}{2} = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x = 6$. Vậy min $y = 6$ tại $x = 6$.

LT 4.2. Hai thừa số $x + 3 \geq 0$ và $5 - x \geq 0$ có tổng $(x + 3) + (5 - x) = 8$ không đổi. Theo Cô-si

$$(x + 3)(5 - x) \leq \left(\frac{(x + 3) + (5 - x)}{2} \right)^2 = \left(\frac{8}{2} \right)^2 = 16.$$

Dấu “=” khi $x + 3 = 5 - x \Leftrightarrow x = 1$. Vậy max $y = 16$ tại $x = 1$.

LT 4.3. Tách $\frac{x}{2} = \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2}$ (với $x > 1$ thì $\frac{x-1}{2} > 0$):

$$y = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Dấu “=” khi $\frac{x-1}{2} = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 3$ (do $x > 1$). Vậy min $y = \frac{5}{2}$ tại $x = 3$.

LT 5.1. Gọi hai kích thước là $a, b > 0$; chu vi $2(a + b) = 40$ nên $a + b = 20$. Diện tích $S = ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = 10^2 = 100$ (m²). Dấu “=” khi $a = b = 10$. Vậy diện tích lớn nhất 100 m², khi mảnh vườn là hình vuông cạnh 10 m.

LT 5.2. Gọi cạnh vuông góc với sông là y (rào hai cạnh), cạnh song song với sông là x (rào một cạnh): $x + 2y = 100$. Diện tích

$$S = xy = \frac{1}{2} \cdot (2y) \cdot x \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2y+x}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{100}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2500 = 1250 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Dấu “=” khi $2y = x$, kết hợp $x + 2y = 100$ được $x = 50, y = 25$. Vậy diện tích lớn nhất 1250 m².

LT 5.3. Gọi hai kích thước $a, b > 0$; chu vi $2(a+b) = 8$ nên $a+b = 4$. Diện tích $S = ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = 4$ (m²), dấu “=” khi $a = b = 2$. Vậy diện tích lớn nhất 4 m² (hình vuông cạnh 2 m).

Phiếu bài tập (phần C)

Bài 1. Bất đẳng thức tương đương $(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$ (khai triển: $a^2 - 2a + 1 + \dots \geq 0$), luôn đúng. Dấu “=” khi $a = b = c = 1$.

Bài 2. Áp dụng Cô-si cho ba số dương $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3\sqrt[3]{1} = 3.$$

Dấu “=” khi $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, tức $a = b = c$.

Bài 3. Đặt $u = x - 2y$. Khi đó

$$(x - 2y + 1)^2 + (2x - 4y + 5)^2 = (u + 1)^2 + (2u + 5)^2 = 5u^2 + 22u + 26 = 5 \left(u + \frac{11}{5} \right)^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}.$$



“=” khi $u = -\frac{11}{5}$, tức $x - 2y = -\frac{11}{5}$.

Bài 4. Cô-si: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ và $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Nhân hai vế (các số dương):

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9\sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 9abc.$$

Dấu “=” khi $a = b = c$.

Bài 5. Hai thừa số $x \geq 0$ và $6 - x \geq 0$ có tổng $x + (6 - x) = 6$ không đổi; Cô-si: $x(6 - x) \leq \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$.

Dấu “=” khi $x = 6 - x \Leftrightarrow x = 3$. Vậy $\max y = 9$ tại $x = 3$.

Bài 6. $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Dấu “=” khi $a = b = \frac{3}{2}$. Vậy $\max(ab) = \frac{9}{4}$.

Bài 7. Dùng bất đẳng thức dạng cộng mẫu (hệ quả Bu-nhi-a-cốp-xki) với $x, y > 0$:

$$A = \frac{2^2}{x} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{y} \geq \frac{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2}{x + y} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{1} = \frac{25}{4}.$$

Dấu “=” khi $\frac{2}{x} = \frac{1/2}{y} \Leftrightarrow x = 4y$, kết hợp $x + y = 1$ được $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{1}{5}$. Vậy $\min A = \frac{25}{4}$.

Bài 8. Điều kiện $-2 \leq x \leq 7$ nên $7 - x \geq 0$, $2 + x \geq 0$.

GTNN. Bu-nhi-a-cốp-xki cho $(1; 1)$ và $(\sqrt{7 - x}; \sqrt{2 + x})$:

$$A = 1 \cdot \sqrt{7 - x} + 1 \cdot \sqrt{2 + x} \leq \sqrt{(1 + 1)((7 - x) + (2 + x))} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}.$$

Dấu “=” khi $7 - x = 2 + x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$. Vậy $\max A = 3\sqrt{2}$.

GTNN. Ta có $A^2 = (7 - x) + (2 + x) + 2\sqrt{(7 - x)(2 + x)} = 9 + 2\sqrt{(7 - x)(2 + x)} \geq 9$, nên $A \geq 3$.

Dấu “=” khi $(7 - x)(2 + x) = 0$, tức $x = 7$ hoặc $x = -2$. Vậy $\min A = 3$.

Bài 9. Chiều cao hộp $h = \frac{4}{x^2}$. Diện tích tôn (một đáy x^2 và bốn mặt bên $4xh$):

$$S = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 3\sqrt[3]{64} = 12.$$

Dấu “=” khi $x^2 = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$ (dm), khi đó $h = 1$ dm. Vậy S nhỏ nhất bằng 12 dm² tại $x = 2$ dm.

Bài 10. Sai. Bất đẳng thức Cô-si $x + \frac{1}{x} \geq 2$ chỉ đúng khi $x > 0$; đề bài không cho điều kiện $x > 0$. Nếu $x < 0$ thì $f(x) = x + \frac{1}{x} < 0 < 2$ (ví dụ $f(-1) = -2$), thậm chí f không có giá trị nhỏ nhất. Muốn kết luận $\min f = 2$ phải bổ sung điều kiện $x > 0$ (khi đó dấu “=” đạt tại $x = 1$).

Kiểm tra cơ bản (phần D)

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	A	A	A	B	A	A	B

Câu 1. Chọn A. $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$ với mọi a, b .

Câu 2. Chọn A. Cô-si chỉ áp dụng cho các số không âm (với $a = b = -1$ thì $\frac{a+b}{2} = -1 < 1 = \sqrt{ab}$, nên phương án $ab \geq 0$ sai).



3. Chọn A. $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{9} = 6$, dấu “=” tại $x = 3$.

Câu 4. Chọn B. Hai thừa số $2 - x \geq 0$, $x + 4 \geq 0$ có tổng 6 không đổi nên $(2 - x)(x + 4) \leq \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$, đạt tại $x = -1$.

Câu 5. Chọn A. $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1$, đạt tại $a = b = 1$.

Câu 6. Chọn A. Dấu “=” của Cô-si $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ khi $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, tức $a^2 = b^2$; do $a, b > 0$ nên $a = b$.

Câu 7. Chọn B. $\frac{(x+1)^2}{x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = x + \frac{1}{x} + 2 \geq 2 + 2 = 4$, đạt tại $x = 1$.

Câu 8. a) Đ. b) Đ (đã chứng minh ở LT 3.1). c) S (Cô-si cần số không âm; hơn nữa $\frac{-2-8}{2} = -5 < 4 = \sqrt{16}$). d) Đ ($ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 25$).

Câu 9. $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{16} = 8$, dấu “=” khi $a = b = 4$. **Đáp số: 8.**

Nâng cao (phần E)

NC 1. Đặt $s = x^2 + y^2$ và $p = xy$; vì $x + y = 1$ nên $s + 2p = 1$, tức $s = 1 - 2p$. Viết

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} = \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy}\right) + \frac{1}{2xy}.$$

Với $u = x^2 + y^2 > 0$, $v = 2xy > 0$ thì $u + v = (x + y)^2 = 1$, theo LT 3.1 ta có $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \geq \frac{4}{u + v} = 4$.

Ngoài ra $2xy \leq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{1}{2xy} \geq 2$. Do đó $P \geq 4 + 2 = 6$. Cả hai dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$. Vậy $\min P = 6$.

NC 2. Vì $x, y > 0$, quy đồng thì bất đẳng thức tương đương

$$[(1+x)^2 + (1+y)^2](1+xy) \geq (1+x)^2(1+y)^2.$$

Khai triển và rút gọn, về trái trừ về phải bằng

$$xy(x-y)^2 + (xy-1)^2 \geq 0,$$

luôn đúng. Dấu “=” khi $x = y = 1$.

NC 3. Cộng 3 vào hai vế và nhóm:

$$\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right).$$

Đặt $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$ (đều dương) thì $x + y + z = 2(a + b + c)$. Theo Cô-si $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$, nên

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{x + y + z}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Trừ 3 hai vế được $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$. Dấu “=” khi $a = b = c$.



4. (HSG) Quy đồng, bất đẳng thức tương đương

$$4a(c+1) + 4b(a+1) + 4c(b+1) \geq 3(a+1)(b+1)(c+1).$$

Khai triển hai vế (dùng $abc = 1$) và rút gọn đưa về

$$(ab + bc + ca) + (a + b + c) \geq 6.$$

Theo Cô-si cho ba số dương: $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$ và $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$ (vì $abc = 1$).
Cộng lại được điều phải chứng minh. Dấu “=” khi $a = b = c = 1$.