



B. CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP

■ DẠNG 1. Chứng minh bất đẳng thức bằng biến đổi tương đương

Phương pháp. Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng *tương đương* mà vế trái trừ vế phải là một tổng các bình phương (hoặc tích các số cùng dấu) hiển nhiên không âm. Thường dùng $(a-b)^2 \geq 0$, $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$. Luôn nêu rõ dấu “=” xảy ra khi nào.

Luyện tập 1.1. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Luyện tập 1.2. Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

Luyện tập 1.3. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

■ DẠNG 2. Chứng minh bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

Phương pháp. Khi có ràng buộc tuyến tính (ví dụ $ma + nb = k$) cần chặn tổng bình phương, gom về dạng $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. Chọn hai cặp số hợp lí rồi thay ràng buộc vào. Dấu “=” khi $ay = bx$; nhớ kiểm tra điểm rơi thỏa ràng buộc.

Luyện tập 2.1. Cho $3a + 4b = 7$. Chứng minh $3a^2 + 4b^2 \geq 7$.

Luyện tập 2.2. Cho $a + 2b = 2$. Chứng minh $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$.

Luyện tập 2.3. Cho $2a + 3b = 5$. Chứng minh $2a^2 + 3b^2 \geq 5$.

■ DẠNG 3. Chứng minh bất đẳng thức Cô-si (trọng tâm)

Phương pháp. Nhóm các số *dương* thành từng cặp / bộ rồi áp dụng $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ hoặc $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Với biểu thức đối xứng, thường ghép $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ theo vòng rồi cộng lại. Luôn kiểm tra điều kiện số không âm và chỉ ra dấu “=” (thường $a=b=c$).

Luyện tập 3.1. Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Luyện tập 3.2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Luyện tập 3.3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$.

■ DẠNG 4. Tìm GTLN–GTNN bằng bất đẳng thức (trọng tâm)

Phương pháp. Với phân thức có dạng “số hạng + nghịch đảo” dùng Cô-si hai số (tách để *tích không đổi*); với tích hai thừa số có *tổng không đổi* dùng $(x+y)/2 \geq \sqrt{xy}$. Sau khi chặn phải **tìm điểm rơi** và kiểm tra dấu “=” đạt được.

Luyện tập 4.1. Tìm GTNN của $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}$ với $x > 0$.

Luyện tập 4.2. Tìm GTLN của $y = (x+3)(5-x)$ với $-3 \leq x \leq 5$.

Luyện tập 4.3. Tìm GTNN của $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$.



ANG 5. Bài toán ứng dụng bất đẳng thức thực tế

Phương pháp. Đặt ẩn cho đại lượng cần tối ưu, lập biểu thức theo ràng buộc thực tế (chu vi, thể tích, diện tích...), rồi dùng Cô-si để tìm cực trị. Nhớ đối chiếu *điều kiện thực tế* (độ dài, diện tích > 0) và kết luận kích thước tại điểm rơi.

Luyện tập 5.1. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 40 m. Hỏi diện tích lớn nhất của mảnh vườn bằng bao nhiêu và khi đó hai kích thước bằng bao nhiêu?

Luyện tập 5.2. Người ta muốn rào một mảnh đất hình chữ nhật dọc theo một bờ sông thẳng (*cạnh giáp sông không phải rào*) bằng 100 m lưới. Tìm diện tích lớn nhất có thể rào được.

Luyện tập 5.3. Một sợi dây thép dài 8 m được uốn thành khung một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu?