



★ PHẦN II. BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Ví dụ 1. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2\}$. Viết A, B dưới dạng đoạn/khoảng rồi tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải. Giải từng bất phương trình (mệnh đề chứa biến): $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$ nên $A = [1; 2]$; $|x - 1| < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$ nên $B = (-1; 3)$.

Vì $A = [1; 2] \subset B = (-1; 3)$ nên trên trục số:

$$A \cap B = [1; 2] = A, \quad A \cup B = (-1; 3) = B, \quad A \setminus B = \emptyset, \quad B \setminus A = (-1; 1) \cup (2; 3).$$

Bài này ôn lại: B1 (mệnh đề chứa biến), B2 (khoảng/đoạn), B3 (phép toán).

Ví dụ 2. Cho hai đoạn $A = [m; m + 1]$ và $B = [0; 3]$. Xét mệnh đề $P: “\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B”$. Tìm tất cả giá trị của m để P là mệnh đề đúng.

Lời giải. Mệnh đề P đúng $\Leftrightarrow$ mọi phần tử của A đều thuộc B , tức $A \subset B$. Đoạn A luôn khác rỗng (vì $m < m + 1$). Biểu diễn lên trục số:

$$A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m + 1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2.$$

Vậy P đúng khi và chỉ khi $0 \leq m \leq 2$. Bài này ôn lại: B1 (lượng từ, kéo theo), B2 (tập con), B3 (đoạn).

Ví dụ 3. Trong một trường học, hai mệnh đề sau đều đúng: “Có một số học sinh không có hạnh kiểm tốt” và “Mọi đoàn viên đều có hạnh kiểm tốt”. Hãy dùng quan hệ tập hợp để chỉ ra một kết luận chắc chắn đúng.

Lời giải. Gọi T là tập học sinh có hạnh kiểm tốt, D là tập đoàn viên. Mệnh đề thứ hai cho $D \subset T$. Mệnh đề thứ nhất cho biết tồn tại học sinh không thuộc T ; học sinh đó cũng không thuộc D (vì $D \subset T$). Vậy: “Có một số học sinh không phải là đoàn viên” là kết luận chắc chắn đúng. Bài này ôn lại: B1 (lượng từ, suy luận), B2 (tập con).

Ví dụ 4. Lớp 10A có 45 học sinh; 15 bạn được xếp học lực Giỏi, 20 bạn được xếp hạnh kiểm Tốt, trong đó 10 bạn đạt cả hai. Hỏi: a) bao nhiêu bạn được học lực Giỏi hoặc hạnh kiểm Tốt? b) bao nhiêu bạn chưa Giỏi và chưa Tốt?

Lời giải. Gọi G là tập bạn học lực Giỏi, T là tập bạn hạnh kiểm Tốt: $n(G) = 15, n(T) = 20, n(G \cap T) = 10$.

a) “Giỏi hoặc Tốt” là $G \cup T$: $n(G \cup T) = 15 + 20 - 10 = 25$ (bạn).

b) “Chưa Giỏi và chưa Tốt” là phần bù của $G \cup T$: $45 - 25 = 20$ (bạn). Bài này ôn lại: B1 (liên từ “hoặc”/“và”), B3 (số phần tử, phần bù).

Ví dụ 5. Xét mệnh đề $M: “\forall x \in [-2; 3], x^2 < 9”$. Cho biết M đúng hay sai, nêu mệnh đề phủ định $\overline{M}$ và kiểm chứng.

Lời giải. M sai: chọn $x = 3 \in [-2; 3]$ thì $x^2 = 9$, không nhỏ hơn 9 (đây là một phản ví dụ). Phủ định:

$$\overline{M}: “\exists x \in [-2; 3], x^2 \geq 9”.$$

$\overline{M}$ đúng (chính $x = 3$ thỏa). Lưu ý phủ định của “<” là “ $\geq$ ”, không phải “>”. Bài này ôn lại: B1 (lượng từ, phủ định), B2 (đoạn).



lụ 6. Cho $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, $A = \{x \in E \mid x \text{ là ước của } 10\}$, $B = \{x \in E \mid x \text{ là số nguyên tố}\}$. Liệt kê A, B ; tìm $A \cap B, A \cup B$; kiểm chứng De Morgan cho $C_E(A \cup B)$ và tính $n(A \cup B)$ bằng công thức.

Lời giải. Liệt kê: $A = \{1; 2; 5; 10\}$, $B = \{2; 3; 5; 7\}$. Khi đó

$$A \cap B = \{2; 5\}, \quad A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 10\}.$$

Phần bù trong E : $C_E(A \cup B) = \{4; 6; 8; 9\}$. Mặt khác

$$C_E A = \{3; 4; 6; 7; 8; 9\}, \quad C_E B = \{1; 4; 6; 8; 9; 10\} \Rightarrow C_E A \cap C_E B = \{4; 6; 8; 9\},$$

trùng với $C_E(A \cup B)$, đúng quy tắc De Morgan.

Số phần tử: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 4 - 2 = 6$, khớp với việc đếm trực tiếp $A \cup B$. Bài này ôn lại: B2 (liệt kê), B3 (phép toán, De Morgan, số phần tử).